Analyse Complexe
TD 3
Principe du maximum ; fonctions logarithme et puissances

Exercice 1 Montrer que les fonctions holomorphes du disque unité ouvert dans lui même qui sont propres, i.e. telles que $|f| \to 1$ quand $|z| \to 1$, sont des produits finis d'automorphismes du disque.

Exercice 2 On note D le disque unité ouvert.

1. Soit $f \in H(D)$. On suppose que
$$\forall z \in D,\ |f(z)| \leq 1 \quad ; \quad f(0) = 0.$$
Montrer le lemme de Schwarz :
$$\forall z \in D,\ |f(z)| \leq |z| \quad ; \quad |f'(0)| \leq 1.$$
Quels sont les cas d'égalité ? En déduire que si f est une fonction holomorphe et injective sur D, telle que $f(0) = 0$, $|f'(0)| \leq 1$ et $D \subset f(D)$, alors $f(z) = \alpha z$ pour un certain α de module 1.
2. Soit f une fonction holomorphe sur D, telle que $f(0) = 1$ et $\mathrm{Re}(f) \geq 0$. En considérant la fonction $z \mapsto \frac{f(z)-1}{f(z)+1}$, montrer que :
$$\forall z \in D,\ \frac{1-|z|}{1+|z|} \leq |f(z)| \leq \frac{1+|z|}{1-|z|}.$$
3. Soit f une fonction holomorphe sur D. On suppose que $|f| \leq 1$. Montrer le lemme de Schwarz-Pick :
$$\forall z \in D,\ \frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} \leq \frac{1}{1-|z|^2}.$$
Déterminer les biholomorphismes du disque.
4. (*) Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur l'ouvert $\{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}\ z, \mathrm{Im}\ z > 0\}$ à valeurs dans D, telles que $f(1+i) = 0$. Déterminer $\sup_{f \in \mathcal{F}} |f(2+i)|$.

Exercice 3 Soit $0 < r < R$ deux réels, U un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant la couronne centrée en l'origine de rayons r et R. Soit $f \in H(U)$ non nulle. On pose, pour $r \leq \rho \leq R$,
$$M(\rho) = \sup\{|f(z)|, |z| = \rho\}.$$
Montrer que la fonction $\ln \rho \mapsto \ln M(\rho)$ est (bien définie et) convexe.

On pensera à considérer les fonctions $z \mapsto z^p f(z)^q$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 4

1. Soit f une fonction entière, avec $f(0) = 0$. Si $r > 0$, on pose
$$M_f(r) = \sup_{|z| \leq r} |f(z)| \quad ; \quad A_f(r) = \sup_{|z| \leq r} \mathrm{Re} f(z).$$
Montrer que si $0 < r < R$,
$$M_f(r) \leq \frac{2r}{R-r} A_f(R).$$
Quelle inégalité obtient-on si on ne suppose plus que $f(0) = 0$?
On appliquera une version du lemme de Schwarz de l'exercice 2 à $z \mapsto \frac{2f(z)}{2A_f(R) - f(z)}$.

2. *Application 1.* Si $n \geq 1$, on note $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des $f \in H(\mathbb{C})$ telles que

$$|f(z)| =_{|z| \to +\infty} O(\exp^{\circ n}(|z|)).$$

Montrer par récurrence sur n que si $f \in \mathcal{E}_n$ est non constante, $\mathbb{C} \backslash f(\mathbb{C})$ est soit vide, soit un singleton.
Ce résultat est un cas particulier simple du "petit" théorème de Picard que l'on recroisera plus tard.

3. *Application 2.* Si P est un polynôme non nul, montrer que l'équation $\exp(z) - P(z) = 0$ a une infinité de solutions.

Exercice 5

1. On note $V = \{z \in \mathbb{C} \colon \mathrm{Re}\,(z) \geq 0\}$. Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert contenant V, telle que $|f(z)| \leq 1$ si z est sur l'axe imaginaire et telle qu'il existe $0 < \delta < 1$ et des constantes A, B tels que

$$|f(z)| \leq A \exp(B|z|^{1-\delta})$$

pour tout $z \in V$.

(a) On note $g(z) = \exp(z^{1-\delta/2})$ (où $z^{1-\delta/2}$ est la détermination définie sur $\mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_-$, positive sur l'axe réel positif, prolongée par 0 en 0). Montrer que $|g|$ est minorée par 1 sur l'axe imaginaire et que $|g(z)| \geq \exp(R^{1-\delta/2} m)$ si $z \in V$ vérifie $|z| = R$, pour une certaine constante $m > 0$ ne dépendant que de δ.

(b) Pour $n \geq 1$ entier, on pose $h_n(z) = \frac{f(z)^n}{g(z)}$. Majorer $|h_n|$ au bord du demi-disque ouvert $\mathring{V} \cap D(0, R)$ et en déduire que f vérifie :

$$\forall z \in V, \ |f(z)| \leq 1.$$

2. En déduire que si f est une fonction entière non constante telle qu'il existe $\epsilon < 1/2$ et des constantes A, B tels que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \ |f(z)| \leq A \exp(B|z|^{\epsilon}),$$

alors f n'est bornée sur aucune demi-droite partant de l'origine.

3. *Application.* Soit f une fonction holomorphe non nulle sur un disque centré en 0, solution de l'équation $f'(z) = -f(z/2)$. Montrer que f est entière et que si pour tout $R > 0$, on note $M(R) = \max_{|z|=R} |f(z)|$, alors $M(R) \leq 2RM(R/2)$ dès que $R \geq 1$. Montrer que f n'est bornée sur aucune demi-droite partant de l'origine.

Exercice 6

Soit f une fonction holomorphe bornée sur D, avec $f(0) = 0$ et $f'(0) \neq 0$. Soit $M = \sup_D |f|$. Soit $u \in \mathbb{C} \setminus f(D)$.

1. Montrer qu'il existe une fonction holomorphe g sur D telle que $g(z)^2 = 1 - f(z)/u$ pour tout z, et $g(0) = 1$.
2. A l'aide de la formule de Parseval, montrer que $|u| \geq |f'(0)|^2/(4M)$. En déduire que

$$D\left(0, \frac{|f'(0)|^2}{4M}\right) \subset f(D).$$

Il est amusant de comparer cet exercice à l'exercice 8 du TD 2.

Exercice 7

Soit f une fonction holomorphe et injective sur le disque unité, telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$. Le but de cet exercice est de montrer le "théorème 1/4" de Koebe : $D(0, 1/4) \subset f(D(0, 1))$.

1. Soit g la fonction sur $\mathbb{C} \backslash \bar{D}(0, 1)$ définie par $g(z) = z + \sum_{n \geq 0} b_n z^{-n}$ (on suppose que cette somme converge pour tout z tel que $|z| > 1$). Montrer que g est holomorphe.
2. Déterminer l'image par $z \mapsto z + b_0 + b_1/z$ de $S(0, r)$, pour r grand.
3. (*) Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, pour r suffisamment grand, l'aire A_r de

$$\mathbb{C} \setminus g\left(\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > r\}\right)$$

vérifie $|A_r - \pi r^2| < \epsilon$.

4. En déduire que si g est injective, l'aire de $\mathbb{C} \setminus g\left(\mathbb{C} \setminus \bar{D}(0, 1)\right)$ vaut

$$\pi \left(1 - \sum_{n \geq 1} n|b_n|^2\right).$$

5. On prend f comme au début de l'énoncé. Montrer qu'il existe une fonction holomorphe injective g sur $\mathbb{C} \setminus \bar{D}(0,1)$ telle que $g(z)^2 = 1/f(z^{-2})$ et qui admet un développement comme à la première question.
6. Déterminer le coefficient b_1 de g en fonction des coefficients du développement en série entière de f. En déduire que $|f''(0)| \leq 4$.
7. En appliquant le résultat de la question précédente aux fonctions de la forme $z \mapsto uf(z)/(u - f(z))$, où $u \in \mathbb{C} \setminus f(D(0,1))$, conclure que $D(0,1/4) \subset f(D(0,1))$.